ПМ-087

№1

Пусть переходы – это когда ~~сумм~~ складывая два числа столбиком, сумма двух цифр одного разряда > 10, то есть переходит в десятки.

Рассмотрим 2 случая: без переходов и с.

1) Т.к. переходов нет., то сложив два числа, то сумма цифр также сложится, например 123+456 (сумма = 6+15) = 975 (сумма = 21). Причём это будет происходить во всех суммах без переходов. Т.к. сумма чисел от 1 до 6 = 21, то сумма цифр всех трёхзначных чисел будет равна 21.

2) Если переходы есть, то нужно найти все случаи, в которых эти переходы будут происходить. Эти случаи: 6+4 и 6+5. Сумма цифр при этом будет уменьшаться на 9, т.к. цифра разряда, например единиц, уменьшится на 10, а десятков – увеличится на 1. Других случаев перехода нет и быть в других разрядах не может, значит больше одного перехода в сумме быть не может. Т.к. с переходом сумма цифр уменьшается на 9, то сумма цифр трёхзначного числа с переходами будет равна

$21 - 9 = 12$

Ответ: 21 и 12

7 баллов

№3

Цифры М и Т могут быть только 2 и 1, т.к. 0 в начале числа стоять не может, а $M+T<4$

Рассмотрим $A+O$ их сумма должна быть меньше 5, и если равна 4, то $CKA+CKA$ должно равняться 0, т.к. МАСКА + ТОСКА < 34000, чего невозможно достичь. Значит $A+O<4$. Т.к. 2 и 1 заняты, то A или $O = 3/0$. Рассмотрим $C+C$. Если $C \geq 5$, то будет переход в тысячи, $A+O$ будет $=4$. и МАСКА + ТОСКА будет > 34000, а это противоречие. Значит $C<5$, единственная цифра незанятая <5 – это 4. $C+C=8$.

Рассмотрим $KA+KA$. При переходе в сотни $C+C$ будет $=9$, значит условие соблюдается. Значит K может принимать любое значение от 5 до 9 (5 вариантов) а A, как уже выяснилось $=3/0$ (2 варианта.) Значит общее кол-во вариантов, которые может принимать KA ~~К~~ $= 5 \cdot 2 = 10$ вар.

7 баллов

Ответ: 10 значений

№4 ПМ-087

Рассмотрим одно из чисел набора = 23. 23 – простое, то есть делится на себя и 1. Какими могут быть соседи 23? 13 и 1, т.к. 13+10=23, а 23 : 1. Других соседей у 23 нет, т.к. если не отнимать от 23 десять, а прибавлять, то 23+10 > 25, а такого числа в наборе нет. Ещё таких чисел 2 – это 17 и 19. Они тоже простые и прибавив десять получатся числа, не входящие в набор. Допустим у 19 соседи 9 и 1, то структура будет выглядеть так: 13 – 23 – 1 – 19 – 9, но тогда 17, у которого соседом тоже должна быть единица, просто не получит места в кругу вообще. Значит по кругу так записать 25 чисел нельзя.

Ответ: нет, нельзя.

7 баллов

№2

Выпишем последовательность действий (a – старший, b – средний, c – младший)

$a > b > c$

$a + b + c = 144$

	(a)Ст.	(b)Ср.	(c)Мл.
до	a	b	c
1 пр.	$a-b-c$	$2b$	$2c$
2 пр.	$2a-2b-2c$	$3b-a-c$	$4c$
3 пр.	$4a-4b-4c$	$6b-2a-2c$	$7c-a-b$

Первым проиграл старший, т.к. если бы проиграл средний или младший, то они бы потеряли все деньги и к концу имели бы 0 монет. Вторым проиграл средний по той же причине. ($b>c$, значит и $2b>2c$)

Здесь мы можем видеть, сколько может осталось у каждого из гномов после каждого проигрыша. Причем из условия $4a-4b-4c = 6b-2a-2c = 7c-a-b$.

Решим эту систему уравнений, выразив b из ~~а и~~ денег старшего и среднего, затем c из денег старшего и младшего, и ~~[illegible]~~ представим $a+b+c=144$ одной переменной — a и решим уравнение.

$4a-4b-4c = 6b-2a-2c$

$10b = 6a-2c$

$b = \frac{6a-2c}{10}$

$b = \frac{3a-c}{5}$

$4a-4b-4c = 7c-a-b$

$4a - \frac{12a-4c}{5} - 4c = 7c - a - \frac{3a-c}{5} \quad *5$

$20a-12a+4c-20c = 35c-5a-3a+c$

$52c = 16a$

$c = \frac{16a}{52} = \frac{4a}{13}$

$a+b+c=144$

$a + \frac{3a-c}{5} + \frac{4a}{13} = 144$

$a + \frac{3a-\frac{4a}{13}}{5} + \frac{4a}{13} = 144$

$\frac{13a+4a}{13} + \frac{3a-\frac{4a}{13}}{5} = 144$

$\frac{17a}{13} + \frac{3a-\frac{4a}{13}}{5} = 144$

$\frac{85a+39a-4a}{65} = 144$

$\frac{120a}{65} = 144$

~~120a = 1872~~

$\frac{24a}{13} = 144$

$24a = 1872$

$a = 78$

Ответ: $a = 78$ (у Бима было 78 монет)

7 баллов

ПМ-087

N5

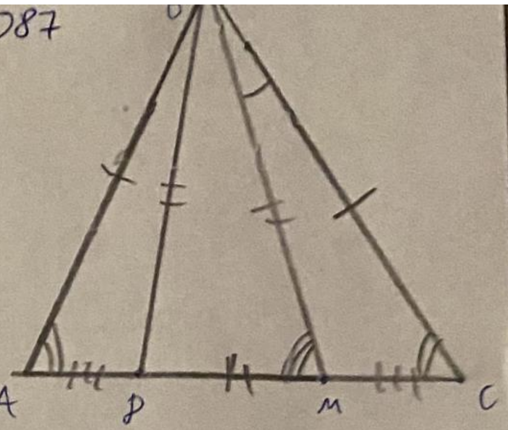
Дано: $\triangle ABC$

$M \in AC$

$AM = BM + MC$

$\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$

Найти: $\angle BMA$



Решение: ДП (дополнительное построение) точка $D \rightarrow \begin{cases} D \in AC \\ AD = MC \end{cases}$

$DM = AM - AD = AM - MC$

$BM = AM - MC$

Значит $DM = BM$ по свойству транзитивности.

$\angle BMC = 180^\circ - \angle BMA$ т.к. $\angle BMA$ и $\angle BMC$ – смежные.

~~$\angle BCM = 180^\circ - \angle MBC - \angle BMC = 180^\circ - b - 180^\circ + a$~~

$\angle BCM = 180^\circ - \angle MBC - \angle BMC = 180^\circ - 180^\circ + \angle BMA - \angle MBC = \angle BMA - \angle MBC =$

$= \angle MBC + \angle BAC - \angle MBC = \angle BAC$ по свойству о сумме углов треугольника.

Значит $\triangle ABC$ – равнобедренный по признаку о равенству углов (основание AC, углы $\angle BAC = \angle BCA$.)

$AB = CB$, как боковые стороны равнобедренного треугольника.

Рассмотрим $\triangle BAD$ и $\triangle BCM$. $AB = CB$ по доказанному. $AD = CM$ по построению. $\angle BAD = \angle BCM$ по доказанному. $\triangle BAD = \triangle BCM$ по двум сторонам и углу между ними. $BD = BM$, как соответственные элементы в равных треугольниках.

В $\triangle BDM$ $BD = DM = MB$. Значит $\triangle BDM$ – равносторонний. У равностороннего треугольника все углы равны 60°. Значит $\angle BMD$, который $\in \angle BMA = 60^\circ$

Ответ: $\angle BMA = 60^\circ$.

3 стр.