А т.к. $AB \perp y = x$, то

$$1 \cdot \left(-\frac{y_B}{x_A}\right) = -1$$

$$\frac{y_B}{x_B} = 1$$

$$y_B = x_A = b$$

Тогда $y(b) = 0$

$$b^2 + ab + b = 0$$

$$b(b + a + 1) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ – невозможно, т.к. } b < 0 \\ b + a + 1 = 0 \end{array}\right.$

$$a = -b - 1.$$

$$y = x^2 - (b+1)x + b$$

Нули:

$$D = (b+1)^2 - 4b = b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0, \text{ т.к. } 2 \text{ нуля, то } b \neq 1.$$

$$x = \frac{b + 1 \pm (b-1)}{2} \quad \left[\begin{array}{l} x = b \\ x = 1 \end{array}\right.$$

А т.к. корни $\{x_B; x_C\}$, а $x_B = b$,

то $x_C = 1$, то $OC = 1$.

ИК-200

Ответ: 1.

N 2.

Пусть дана правильная дробь $\frac{m}{n}$, где m, n – натуральные. Тогда при умножении числителя и знаменателя на одно и то же $k \in N$, дробь не изменится, а при прибавлении k к числителю и знаменателю значение дроби увеличится, т.к.

$\cancel{\frac{m+k}{n+k} > \frac{m}{k}}$ ~~т.к.~~ $\cancel{(n+k) \cdot n > 0}$

$\cancel{(m+k) \cdot n > m(n+k)}$

$\cancel{mn + kn > mn + km}$

$\cancel{kn > k}$

$m < n$ (т.к. $\frac{m}{n}$ – правильная

то $km < kn$

$mn + km < mn + kn$

$m(n+k) < n(m+k) \quad | : ((n+k) \cdot n) > 0$

(т.к. m, n, k – натуральные)

$\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$.

Также если $\frac{m}{n}$ правильная, то $\frac{m+k}{n+k}$ правильная, т.к.

$n+k > m+k$, т.к. $n > m$.

Таким образом, разрешенными преобразованиями возможно получить только дробь, большую или равную исходной, а т.к. $\frac{1000}{2021} < \frac{1}{2}$, т.к. $2000 < 2021$, то $\frac{1}{2}$ её получить невозможно.

Ответ: нет.

№3. МК-200

Оценка: предположим, что найдется такой набор из 100 чисел, удовлетворяющий условиям задачи, где наибольшее число больше 2021.

Тогда т.к. сумма всех 100 чисел равна $41 \cdot 100 = 4100$, то сумма остальных 99 чисел меньше, чем $4100 - 2021 = 2079$, то их среднее арифметическое меньше, чем

$\frac{2079}{99} = 21$, т.е. получили противоречие.

Пример для 2021:

1 число равно 2021,

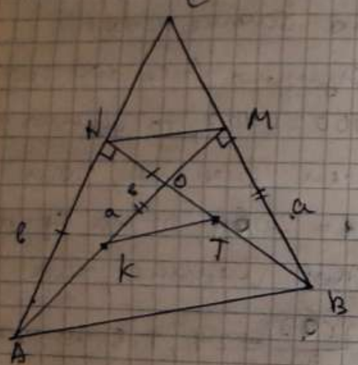
99 чисел равны 21.

Тогда среднее арифметическое всех чисел $2021 + 99 \cdot 21 = 4100$,

а т.к. каждое число ≥ 21, то среднее арифметическое любых 99 из них ≥ 21, т.е. все условия удовлетворены

Ответ: 2021

№ 4.



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный, $\angle C > 45°$, AM и BN – медианы, $T \in BN$, $K \in AM$, $KM = BM$, $AN = NT$

Доказать: $MN \parallel KT$.

1. Пусть $BM = a$, $AN = b$, то $NT = b$, $MK = a$.
Пусть $\angle C = \varphi$, то $\angle CAM = 90° - \varphi$, $\angle CBN = 90° - \varphi$ (из $\triangle CAM$ и $\triangle CBN$, по сумме $\angle$)
Тогда пусть $AM \cap BN = O$, то в $\triangle MOB$, $MO = a \cdot tg(90° - \varphi)$, в $\triangle ANO$, $NO = b \cdot tg(90° - \varphi)$, то

$OT = b - b \cdot tg(90° - \varphi) = b(1 - tg(90° - \varphi)) = b(1 - ctg\varphi)$

$OK = a - a \cdot tg(90° - \varphi) = a(1 - tg(90° - \varphi)) = a(1 - ctg\varphi)$.

МК-200

2. $\triangle ANO \sim \triangle BMO$ по 2 углам, т.к. $\angle N = \angle M = 90°$, т.к. BM и AM – высоты, $\angle NOA = \angle MOB$ как вертикальные,
то $\frac{NO}{MO} = \frac{NA}{MB} = \frac{b}{a}$ как соотв.,
то т.к. $\frac{TO}{KO} = \frac{b(1-ctg\varphi)}{a(1-ctg\varphi)} = \frac{b}{a}$, то
$\frac{NO}{MO} = \frac{TO}{KO}$, то

$NO \cdot KO = TO \cdot MO$

$\frac{KO}{MO} = \frac{TO}{NO}$, а т.к. $\angle NOM = \angle TOK$ как вертикальные, то $\triangle NOM \sim \triangle TOK$ по 2 проп. сторонам и $\angle$ между ними, то $\angle MNO = \angle OTK$ как соотв., то по призн. о накр. леж. углах $MN \parallel KT$,

ч.т.д.

№5.

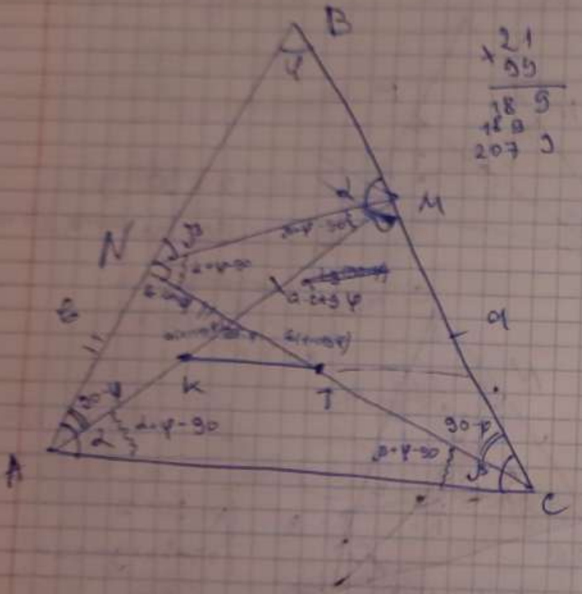
Предположим, есть участники 6ти или больше различных возрастов. Тогда можно составить группу из 6 человек попарно различного возраста — противоречие. Значит, разных возрастов не больше, чем 5.

Заметим, что найдется хотя бы один регион, из которого приехали 41 или больше участников, т.к. иначе общее кол-во участников было бы $\leq 40 \cdot 7 = 280$ — противоречие. МК-200

Тогда из этого региона приехало либо 21 или больше мальчиков, либо 21 или больше девочек, т.к. иначе оттуда приехало $\leq 20 + 20 = 40$ человек — противоречие. Тогда среди этих мальчиков (девочек) найдутся 5 человек одного возраста, т.к. иначе их было $\leq 5 \cdot 4 = 20$ — противоречие.

Значит, найдутся 5 человек из одного региона, одного пола и возраста, ч.т.д.

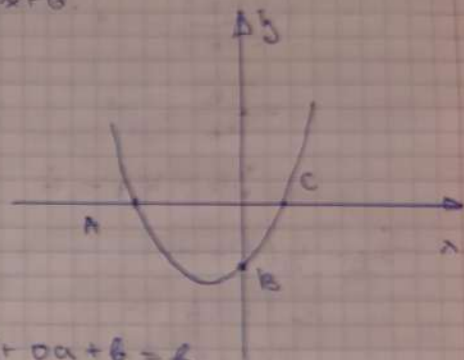
ЛК-200



$$\begin{array}{r} \times\ 21 \\ 99 \\ \hline 189 \\ 189 \\ \hline 2079 \end{array}$$

N 1 ЛК - 200

$y = x^2 + ax + b$



$y(0) = 0^2 + 0a + b = b$

то $B = b$

Пусть $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, то

$y_A = x_B = 0$. тогда

$AB: \dfrac{x - x_B}{x_A - x_B} - \dfrac{y - y_B}{y_A - y_B} = 0$

$\dfrac{x - 0}{x_A - 0} - \dfrac{y - y_B}{0 - y_B} = 0$

$\dfrac{x}{x_A} - \dfrac{y - y_B}{-y_B} = 0$

$y - y_B + \dfrac{x \cdot y_B}{x_A} = 0$

$y = -x \cdot \dfrac{y_B}{x_A} + y_B$.